Grado en Matemáticas. UNIVERSIDAD DE GRANADA.
Ecuaciones en Derivadas Parciales.
20 de abril de 2017.

1. *(3 puntos)* Enunciar la fórmula de la solución de la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3$.

   Usar el método de descenso de Hadamard para deducir la expresión de la solución en dimensión 2.

2. *(4 puntos)* Consideremos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} &xu_x(x,y) + yu_y(x,y) = x\,y\;u^2(x,y),\\ &u(x,1/x) = -1 \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

   a) *(1 punto)* ¿Es el problema característico en algún punto de la curva $C = \{(x, 1/x) : \; x > 0\}$?
   b) *(1 punto)* ¿Podemos asegurar la existencia de solución en un entorno de dicha curva C?
   c) *(1 punto)* Resolver el sistema característico. ¿Qué forma tienen las curvas características?
   d) *(1 punto)* Encontrar una expresión explícita de la solución. ¿Cuál es su dominio?

3. *(3 puntos)* Consideramos el problema:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, & x \geq 0,\; t \geq 0\\ u(x,0) = f(x), & x \geq 0,\\ u_t(x,0) = 2f(x), & x \geq 0\\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

   a) *(1 punto)* ¿Bajo qué condiciones sobre f admite solución dicho problema?
   b) *(1 punto)* Supongamos que $f(x) = 0$ si $x \geq 2$, $f(x) > 0$ si $x \in (0,2)$. Si $u(x,t)$ es una solución, ¿se tiene que $u(4,1) > 0$? ¿Y $u(5,8) > 0$? ¿Por qué?
   c) *(1 punto)* Calcular la solución si $f(x) = x\log(1 + x^2)$.

Solución.

Ejercicio 1. Hecho en clase.

Ejercicio 2.
Escribimos en primer lugar el sistema característico, fijado $x_0 > 0$:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), & x(0) = x_0,\\ y'(t) = y(t), & y(0) = \frac{1}{x_0},\\ u'(t) = x(t)y(y)u(t)^2, & u(0) = -1. \end{cases} \tag{1}$$

De esa ecuación resulta que el vector de salida de las curvas características es $(x'(0), y'(0)) = (x_0, \frac{1}{x_0})$. Por otro lado, un vector tangente a la curva C en $(x_0, \frac{1}{x_0})$ es $(1, -\frac{1}{x_0^2})$. Y claramente esos dos vectores no son proporcionales para ningún $x_0 > 0$; por ejemplo, podemos calcular el determinante correspondiente:

$$\begin{vmatrix} x_0 & \frac{1}{x_0} \\ 1 & -\frac{1}{x_0^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x_0} \neq 0.$$

Por tanto el problema es no característico.

La respuesta a la pregunta b) es sí: por el teorema de existencia y unicidad local que vimos en clase, una EDP quasilineal con coeficientes C^1 y dato no característico siempre tiene solución en un entorno de la hipersuperficie (en este caso, la curva C).

Resolviendo en (1), nos queda la siguiente expresión para las funciones $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^t, \\ y(t) = \frac{1}{x_0} e^t. \end{cases} \tag{2}$$

Vemos entonces que $(x(t), y(t)) = e^t(x_0, \frac{1}{x_0})$. Por tanto las curvas características están contenidas en rectas que parten del origen y pasan por el punto $(x_0, \frac{1}{x_0})$. Si $t \to +\infty$, $(x(t), y(t))$ diverge, y si $t \to -\infty$, $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$.

La ecuación para $u(t)$ queda $u'(t) = e^{2t} u(t)^2$. Claramente u no es la solución 0, ya que $u(0) = -1$. Entonces:

$$\frac{u'(t)}{u(t)^2} = e^{2t} \Rightarrow \frac{-1}{u(t)} = C + \frac{e^{2t}}{2} \Rightarrow u(t) = \frac{-2}{C' + e^{2t}}.$$

Puesto que $u(0) = -1$, llegamos a que $C' = 1$, y por tanto $u(t) = \frac{-2}{1+e^{2t}}$.

Además, de las expresiones anteriores obtenemos:

$$xy = x_0 e^t \frac{1}{x_0} e^t = e^{2t} \Rightarrow u(x, y) = \frac{-2}{1 + xy}.$$

El dominio natural de dicha función (conteniendo la curva C) es el primer cuadrante $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\}$.

Ejercicio 3.

Por lo visto en clase, el problema tiene solución si se verifican las condiciones de compatibilidad $f(0) = 0$, $f'''(0) = 0$.

Denotemos por $\tilde{f}$ la extensión impar de f, es decir,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ -f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Entonces se tiene que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(x + t) + \tilde{f}(x - t)) + \int_{x-t}^{x+t} \tilde{f}(s)\, ds.$$

Por tanto,

$$u(4, 1) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(5) + f(3)) + \int_3^5 \tilde{f}(s)\, ds = \frac{1}{2}(f(5) + f(3)) + \int_3^5 f(s)\, ds = 0.$$

Además,

$$u(5, 8) = \frac{1}{2}(\tilde{f}(13) + \tilde{f}(-3)) + \int_{-3}^{13} \tilde{f}(s)\, ds = \frac{1}{2}(f(13) - f(-3)) + \int_{-2}^{2} \tilde{f}(s)\, ds = 0,$$

ya que $\tilde{f}$ es impar.

Por último, si $f(x) = x \log(1 + x^2)$, observemos que esa expresión nos da lugar a una función C^∞ *impar*. Por lo tanto, podemos aplicar directamente la fórmula de D'Alembert, y ya tenemos garantizado que $u(0, t)$ será igual a 0.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(x+t)\log(1+(x+t)^2) - (x-t)\log(1+(x-t)^2)] + \int_{x-t}^{x+t} s\log(1+s^2)\,ds.$$

Para calcular el segundo sumando, calculamos en primer lugar la integral indefinida mediante el cambio de variable $t = 1 + s^2$, e integrando por partes:

$$\int s\log(1+s^2)\,ds = \frac{1}{2}\int \log t\,dt = \frac{1}{2}(t\log t - t)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{2}\{&(x+t)\log(1+(x+t)^2) - (x-t)\log(1+(x-t)^2) + (1+(x+t)^2)\log(1+(x+t)^2) \\ &-1-(x+t)^2 - (1+(x-t)^2)\log(1+(x-t)^2) + 1 + (x-t)^2\} \\ = \frac{1}{2}\{&(1+(x+t)(x+t)^2)\log(1+(x+t)^2) - (1+(x-t)+(x-t)^2)\log(1+(x-t)^2)\} - 2xt. \end{aligned}$$